

13.1

a) Jonon erotusluku d saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = 31 - 19 = 12$$

$$d = a_2 - a_1$$

Lasketaan jonon 14. jäsen.

$$a_{14} = 19 + 13 \cdot 12$$

$$= 175$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

missä $a_1 = 19$, $n = 14$ ja $d = 12$.

b) **Tapa 1** Käytetään aritmeettisen summan laskukaavaa.

$$S_{14} = 14 \cdot \frac{19 + 175}{2}$$

$$= 1358$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä}$$

$n = 14$, $a_1 = 19$ ja $a_{14} = 175$.

Tapa 2 Lasketaan summa CAS-laskimella.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}a_n &= 19 + (n-1) \cdot 12 \\ &= 12n + 7\end{aligned}$$

$a_n = a_1 + (n-1)d,$
missä $a_1 = 19$ ja $d = 12$.

Lasketaan jonon 14 ensimmäisen jäsenen summa.

$$\sum_{n=1}^{14} (12n + 7) = 1358$$

Lasketaan summa CAS-laskimella.

Vastaus

a) $a_{14} = 175$

b) $S_{14} = 1358$

13.2

Summa on aritmeettinen, koska summan seuraava jäsen saadaan edellisestä aina lisäämällä luku 1.

$$\begin{aligned} S_{70} &= 70 \cdot \frac{1+70}{2} \\ &= 2485 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä} \\ n &= 70, \ a_1 = 1 \text{ ja } a_{70} = 70. \end{aligned}$$

Vastaus

2485

13.3

Kävelymatkojen pituudet ovat aritmeettisen jonon 75, 125, 175, ... peräkkäisiä jäseniä. Pitää laskea jonon 30 ensimmäisen jäsenen summa.

Tapa 1 Käytetään aritmeettisen summan laskukaavaa.

Yhteenlaskettavien lukumäärä on 30 ja ensimmäinen yhteenlaskettava 75.

Lasketaan viimeinen yhteenlaskettava eli jonon 30. jäsen.

$$\begin{aligned}a_{30} &= 75 + 29 \cdot 50 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 75, n=30 \text{ ja } d=50. \\ &= 1525\end{aligned}$$

Lasketaan jonon 30 ensimmäisen jäsenen summa.

$$\begin{aligned}S_{30} &= 30 \cdot \frac{75 + 1525}{2} & S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä} \\ & & n &= 30, a_1 = 75 \text{ ja } a_{30} = 1525. \\ &= 24\,000\end{aligned}$$

30 ensimmäisen päivän aikana kävelty matka on 24 000 m = 24 km.

Tapa 2 Lasketaan summa CAS-laskimella.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}a_n &= 75 + (n-1) \cdot 50 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 75 \text{ ja } d = 50. \\ &= 50n + 25\end{aligned}$$

Lasketaan jonon 30 ensimmäisen jäsenen summa.

$$\sum_{n=1}^{30} (50n + 25) = 24\,000$$

Lasketaan summa CAS-laskimella.

30 ensimmäisen päivän aikana kävelty matka on $24\,000 \text{ m} = 24 \text{ km}$.

Vastaus

24 km

13.4

Merkitään putkien lukumäärää alimmassa kerroksessa kirjaimella n .

Putkien lukumäärä pinossa on $1 + 2 + 3 + \dots + n$.

Lukumäärä on aritmeettinen summa, jossa on n yhteenlaskettavaa.

Muodostetaan summan lauseke.

$$S_n = n \cdot \frac{1+n}{2} \qquad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä } a_1 = 1 \text{ ja } a_n = n.$$

Ratkaistaan, millä n :n arvolla summan arvo on 500.

$$n \cdot \frac{1+n}{2} = 500 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n \approx -32,1 \text{ tai } n \approx 31,1$$

Koska putkien lukumäärä n on positiivinen kokonaisluku, on suurin mahdollinen n :n arvo 31.

Alimpaan kerrokseen voi laittaa enintään 31 putkea.

Lasketaan pinossa olevien putkien lukumäärä.

$$\begin{aligned} S_{31} &= 31 \cdot \frac{1+31}{2} & S_n &= n \cdot \frac{1+n}{2}, \text{ missä } n = 31. \\ &= 496 \end{aligned}$$

Pinossa on 496 putkea, joten yli jää 4 putkea.

Vastaus

Alimpaan kerrokseen 31 putkea, yli jää 4 putkea.

13.5

Aritmeettisen jonon 2, 5, 8, ... ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$ ja erotusluku $d = 3$.

Jonon n :s jäsen on

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$$

$$= 3n - 1.$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ missä}$$

$$a_1 = 2 \text{ ja } d = 3.$$

Muodostetaan jonon n :n ensimmäisen jäsenen summan lauseke.

$$S_n = n \cdot \frac{2 + 3n - 1}{2}$$

$$= n \cdot \frac{3n + 1}{2}$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä}$$

$$a_1 = 2 \text{ ja } a_n = 3n - 1.$$

Ratkaistaan, millä n :n arvolla summan arvo on 10 000.

$$n \cdot \frac{3n + 1}{2} = 10\,000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx -81,8 \text{ tai } n \approx 81,5$$

Koska yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärä n on positiivinen kokonaisluku, pitää jäseniä laskea yhteen vähintään 82.

Vastaus

vähintään 82

13.6

Ensimmäinen yhteenlaskettava on 105 ja viimeinen yhteenlaskettava 994.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon 105, 112, 119, ... yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Jonon peräkkäisten jäsenten erotus on $d = 112 - 105 = 7$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}a_n &= 105 + (n-1) \cdot 7 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 105 \text{ ja } d = 7. \\ &= 7n + 98\end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen luku 994 on.

$$\begin{aligned}a_n &= 994 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 7n + 98. \\ 7n + 98 &= 994 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &= 128\end{aligned}$$

Luku 994 on jonon 128. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 128.

Lasketaan aritmeettisen summan $105 + 112 + 119 + \dots + 994$ arvo.

$$\begin{aligned}S_{128} &= 128 \cdot \frac{105 + 994}{2} & S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä} \\ & & n &= 128, a_1 = 105 \text{ ja } a_{128} = 994. \\ &= 70\,336\end{aligned}$$

Vastaus

70 336

13.7

a) $11 + 5 - 1 - 7 - \dots - 73 = 11 + 5 + (-1) + (-7) + \dots + (-73)$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on 11 ja viimeinen yhteenlaskettava -73 .

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Jonon peräkkäisten jäsenten erotus on $d = 5 - 11 = -6$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 11 + (n-1) \cdot (-6) & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 11 \text{ ja } d = -6. \\ &= 17 - 6n \end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen luku -73 on.

$$\begin{aligned} a_n &= -73 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 17 - 6n. \\ 17 - 6n &= -73 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &= 15 \end{aligned}$$

Luku -73 on jonon 15. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 15.

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$\begin{aligned} S_{15} &= 15 \cdot \frac{11 + (-73)}{2} & S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä} \\ &= -465 & n &= 15, a_1 = 11 \text{ ja } a_{15} = -73. \end{aligned}$$

- b) Ensimmäinen yhteenlaskettava on 1,2 ja viimeinen yhteenlaskettava 13,8.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Jonon peräkkäisten jäsenten erotus on $d = 1,5 - 1,2 = 0,3$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 1,2 + (n-1) \cdot 0,3 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 1,2 \text{ ja } d = 0,3. \\ &= 0,3n + 0,9 \end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen luku 13,8 on.

$$\begin{aligned} a_n &= 13,8 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 0,3n + 0,9. \\ 0,3n + 0,9 &= 13,8 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &= 43 \end{aligned}$$

Luku 13,78 on jonon 43. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 43.

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$\begin{aligned} S_{43} &= 43 \cdot \frac{1,2 + 13,8}{2} & S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä} \\ &= 322,5 & n &= 43, a_1 = 1,2 \text{ ja } a_{43} = 13,8. \end{aligned}$$

Vastaus

a) -465

b) 322,5

13.8

Aritmeettisen summan lausekkeessa

$$S = 16 \cdot \frac{45 - 30}{2} = 16 \cdot \frac{45 + (-30)}{2}$$

on $n = 16$, $a_1 = 45$ ja $a_n = -30$.

a) Yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 16$.

b) Ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 45$.

c) Viimeinen yhteenlaskettava $a_{16} = -30$.

Vastaus

a) 16

b) 45

c) -30

13.9

- a) Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_8 = 7 \cdot 8 - 11 = 45$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_{30} = 7 \cdot 30 - 11 = 199$.

Yhteenlaskettavien termien lukumäärä on

$$30 - 7 = 23.$$

Lukujonon 7 ensimmäistä jäsentä jäävät pois.

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$S_{23} = 23 \cdot \frac{45 + 199}{2} \\ = 2806$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava 45.
Viimeinen yhteenlaskettava 199.
Yhteenlaskettavien lukumäärä 23.

- b) Lasketaan aritmeettisen summan arvo CAS-laskimella.

$$\sum_{n=8}^{30} (7n - 11) = 2806$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava a_8 .
Viimeinen yhteenlaskettava a_{30} .
Yleisen jäsenen lauseke $a_n = 7n - 11$.

Vastaus

- a) 2806
b) 2806

13.10

Tuolien lukumäärät riveillä muodostavat aritmeettisen jonon, jonka erotusluku $d = 3$.

Jonon 15 ensimmäisen jäsenen summan tulee olla 600.

Merkitään ensimmäisen rivin tuolien lukumäärää kirjaimella a_1 .

Viimeisellä eli 15. rivillä olevien tuolien lukumäärä on

$$a_{15} = a_1 + 14 \cdot 3 = a_1 + 42. \quad a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ missä } n=15 \text{ ja } d=3.$$

Muodostetaan jonon 15 ensimmäisen jäsenen summan lauseke.

$$\begin{aligned} S_{15} &= 15 \cdot \frac{a_1 + a_1 + 42}{2} & S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä} \\ & & n=15 \text{ ja } a_{15} &= a_1 + 42. \\ &= 15 \cdot \frac{2a_1 + 42}{2} \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a_1 .

$$\begin{aligned} S_{15} &= 600 & \text{Sijoitetaan } S_{15} &= 15 \cdot \frac{2a_1 + 42}{2}. \\ 15 \cdot \frac{2a_1 + 42}{2} &= 600 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ a_1 &= 19 \end{aligned}$$

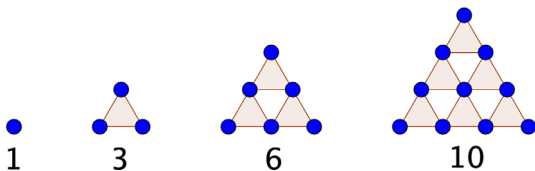
Sijoittelu on mahdollinen. Ensimmäiseen riviin tulee 19 tuolia.

Vastaus

On mahdollinen. Ensimmäiseen riviin tulee 19 tuolia.

13.11

Neljä ensimmäistä kolmiolukua ovat:



Luvut ovat aritmeettisia summia.

1. kolmioluku: 1

2. kolmioluku: $1 + 2 = 3$

3. kolmioluku: $1 + 2 + 3 = 6$

4. kolmioluku: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

a) Seitsemäs kolmioluku on

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

b) 77:s kolmioluku on

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 77$$

$$= 77 \cdot \frac{1 + 77}{2}$$

$$= 3003.$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

missä $n = 77$, $a_1 = 1$ ja $a_{77} = 77$.

c) n :s kolmioluku on

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

$$\begin{aligned} &= n \cdot \frac{1+n}{2} \\ &= \frac{n \cdot (1+n)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2}. \end{aligned}$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

missä $a_1 = 1$ ja $a_n = n$.

Vastaus

a) 28

b) 3003

c) $\frac{n^2 + n}{2} \left(= n \cdot \frac{1+n}{2} \right)$

13.12

a) Jonon erotusluku d saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = -11 - (-16) = 5$$

$$d = a_2 - a_1$$

Lasketaan jonon 17. jäsen.

$$a_{17} = -16 + 16 \cdot 5$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

missä $a_1 = -16$, $n = 17$ ja $d = 5$.

$$= 64$$

b) **Tapa 1** Käytetään aritmeettisen summan laskukaavaa.

$$S_{17} = 17 \cdot \frac{-16 + 64}{2}$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä}$$

$$n = 17, a_1 = -16 \text{ ja } a_{17} = 64.$$

$$= 408$$

Tapa 2 Lasketaan summa CAS-laskimella.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= -16 + (n-1) \cdot 5 \\ &= 5n - 21 \end{aligned}$$

$a_n = a_1 + (n-1)d,$
missä $a_1 = -16$ ja $d = 5$.

Lasketaan jonon 14 ensimmäisen jäsenen summa.

$$\sum_{n=1}^{17} (5n - 21) = 408$$

Lasketaan summa CAS-laskimella.

Vastaus

a) $a_{17} = 64$

b) $S_{17} = 408$

13.13

Lääkemäärät ovat aritmeettisen jonon 120, 115, 110, ... peräkkäisiä jäseniä. Pitää laskea jonon 15 ensimmäisen jäsenen summa.

Tapa 1 Käytetään aritmeettisen summan laskukaavaa.

Yhteenlaskettavien lukumäärä on 15 ja ensimmäinen yhteenlaskettava 120.

Lasketaan viimeinen yhteenlaskettava eli jonon 15. jäsen.

$$\begin{aligned}a_{15} &= 120 + 14 \cdot (-5) & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 120, n=15 \text{ ja } d=-5. \\ &= 50\end{aligned}$$

Lasketaan jonon 15 ensimmäisen jäsenen summa.

$$\begin{aligned}S_{15} &= 15 \cdot \frac{120 + 50}{2} & S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä} \\ & & n &= 15, a_1 = 120 \text{ ja } a_{15} = 50. \\ &= 1275\end{aligned}$$

Kuuriin tarvitaan lääkettä 1275 ml.

Tapa 2 Lasketaan summa CAS-laskimella.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}a_n &= 120 + (n-1) \cdot (-5) & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 120 \text{ ja } d = -5. \\ &= 125 - 5n\end{aligned}$$

Lasketaan jonon 15 ensimmäisen jäsenen summa.

$$\sum_{n=1}^{15} (125 - 5n) = 1275$$

Lasketaan summa CAS-laskimella..

Kuuriin tarvitaan lääkettä 1275 ml.

Vastaus

1275 ml

13.14

Säästöpossuun laitettut rahamäärät ovat aritmeettisen jonon 2, 5, 8, ... peräkkäisiä jäseniä. Pitää selvittää, kuinka monta lukujonon alkupään jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa on yli 1000.

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 2$.

Merkitään yhteenlaskettavien lukumäärää kirjaimella n .

Viimeinen yhteenlaskettava on jonon n :s jäsen a_n .

Muodostetaan n :nnen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1) \cdot 3 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 2 \text{ ja } d = 3. \\ &= 3n - 1 \end{aligned}$$

Muodostetaan summan lauseke.

$$\begin{aligned} S_n &= n \cdot \frac{2 + 3n - 1}{2} & S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \\ & & \text{missä } a_1 &= 2 \text{ ja } a_n = 3n - 1. \end{aligned}$$

Ratkaistaan, millä n :n arvolla summan arvo on 1000.

$$n \cdot \frac{2 + 3n - 1}{2} = 1000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n \approx -25,99 \text{ tai } n \approx 25,65$$

Koska yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärä n on positiivinen kokonaisluku, on pienin mahdollinen n :n arvo 26. Säästöpossussa on rahaa yli 1000 euroa, kun talletuksia on tehty 26 viikkoa.

Vastaus

26 viikon

13.15

- a) Ensimmäinen yhteenlaskettava on 2 ja viimeinen yhteenlaskettava 46.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Jonon peräkkäisten jäsenten erotus on $d = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 2 \text{ ja } d = \frac{1}{2}. \\ &= \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen luku 46 on.

$$\begin{aligned} a_n &= 46 & \text{Sijoitetaan } a_n &= \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}. \\ \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} &= 46 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &= 89 \end{aligned}$$

Luku 46 on jonon 89. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 89.

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$\begin{aligned} S_{89} &= 89 \cdot \frac{2+46}{2} & S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä} \\ &= 2136 & n &= 89, a_1 = 2 \text{ ja } a_{89} = 46. \end{aligned}$$

- b) Ensimmäinen yhteenlaskettava on -45 ja viimeinen yhteenlaskettava 171.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Jonon peräkkäisten jäsenten erotus on $d = -42 - (-45) = 3$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= -45 + (n-1) \cdot 3 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= -45 \text{ ja } d = 3. \\ &= 3n - 48 \end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen luku 171 on.

$$\begin{aligned} a_n &= 171 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 3n - 48. \\ 3n - 48 &= 171 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &= 73 \end{aligned}$$

Luku 171 on jonon 73. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 73.

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$\begin{aligned} S_{73} &= 73 \cdot \frac{-45 + 171}{2} & S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä} \\ &= 4599 & n &= 73, a_1 = -45 \text{ ja } a_{73} = 171. \end{aligned}$$

Vastaus

a) 2136

b) 4599

13.16

Ympyrän kehän pituus on $\pi \cdot d$, missä d on ympyrän halkaisija.

Sisimmän kerroksen pituus on $\pi \cdot 4,5$ cm ja uloimman kerroksen pituus $\pi \cdot 10,5$ cm.

Seuraavan kerroksen halkaisija on aina kaksi kertaa paperin paksuuden verran pidempi kuin edellisen kerroksen halkaisija. Täten paperikerrosten pituudet muodostavat aritmeettisen jonon. Rullalla olevan paperin kokonaispituus on siis aritmeettinen summa.

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $\pi \cdot 4,5$.

Viimeinen yhteenlaskettava on $\pi \cdot 20,5$.

Yhteenlaskettavien lukumäärä on 130.

Lasketaan summan arvo.

$$S_{130} = 130 \cdot \frac{\pi \cdot 4,5 + \pi \cdot 10,5}{2} \quad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä}$$
$$n = 130, a_1 = \pi \cdot 4,5 \text{ ja } a_{130} = \pi \cdot 10,5.$$
$$\approx 3100 \text{ (cm)}$$

Rullassa on paperia $3100 \text{ cm} = 31 \text{ m}$.

Vastaus

31 m

13.17

Merkitään ensimmäisellä viikolla säästettävää rahamäärää kirjaimella x .

Viikoittain säästettävät rahamäärät muodostavat aritmeettisen jonon $x, x + 1, x + 2, \dots$. Pitää selvittää, millä muuttujan x arvolla lukujonon 52 ensimmäisen jäsenen summa on vähintään 2000.

Ensimmäinen yhteenlaskettava on x .

Viimeinen yhteenlaskettava on $x + 51$.

Yhteenlaskettavien lukumäärä on 52.

Muodostetaan summan lauseke.

$$S_{52} = 52 \cdot \frac{x + x + 51}{2} \qquad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä}$$
$$n = 52, a_1 = x \text{ ja } a_{52} = x + 51.$$

Ratkaistaan, millä x :n arvolla summan arvo on 2000.

$$52 \cdot \frac{x + x + 51}{2} = 2000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x \approx 13 \text{ (€)}$$

Jutan tulee säästää ensimmäisellä viikolla 13 euroa.

Vastaus

13 €

13.18

- a) Aritmeettisen summan $2 + 8 + \dots + 92$ ensimmäinen yhteenlaskettava on 2 ja viimeinen yhteenlaskettava 92.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Jonon peräkkäisten jäsenten erotus on $d = 8 - 2 = 6$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1) \cdot 6 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 2 \text{ ja } d = 6. \\ &= 6n - 4 \end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen luku 92 on.

$$\begin{aligned} a_n &= 92 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 6n - 4. \\ 6n - 4 &= 92 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &= 16 \end{aligned}$$

Luku 92 on jonon 16. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 16.

Summan laskukaava on $S_{16} = 16 \cdot \frac{2+92}{2}$ eli vaihtoehto 2.

- b) Aritmeettisen summan $2 + 11 + \dots + 92$ ensimmäinen yhteenlaskettava on 2 ja viimeinen yhteenlaskettava 92.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Jonon peräkkäisten jäsenten erotus on $d = 11 - 2 = 9$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1) \cdot 9 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 2 \text{ ja } d = 9. \\ &= 9n - 7 \end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen luku 92 on.

$$\begin{aligned} a_n &= 92 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 9n - 7. \\ 9n - 7 &= 92 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &= 11 \end{aligned}$$

Luku 92 on jonon 11. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 11.

Summan laskukaava on $S_{11} = 11 \cdot \frac{2+92}{2}$ eli vaihtoehto 3.

- c) Aritmeettisen summan $2 + 4 + \dots + 16$ ensimmäinen yhteenlaskettava on 2 ja viimeinen yhteenlaskettava 16.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Jonon peräkkäisten jäsenten erotus on $d = 4 - 2 = 2$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1) \cdot 2 & a_n &= a_1 + (n-1)d, \text{ missä} \\ & & a_1 &= 2 \text{ ja } d = 2. \\ &= 2n \end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen luku 16 on.

$$\begin{aligned} a_n &= 16 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 2n. \\ 2n &= 16 & | :2 & \text{Yhtälön voi ratkaista CAS-laskimella.} \\ n &= 8 \end{aligned}$$

Luku 16 on jonon 8. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 8.

Summan laskukaava on $S_8 = 8 \cdot \frac{2+16}{2}$ eli vaihtoehto 1.

Vastaus

a) 2 b) 3 c) 1

13.19

Aritmeettisen summan $12 + \dots + 383$ ensimmäinen yhteenlaskettava on 12 ja viimeinen yhteenlaskettava 383. Summan arvo on 10 665.

Ratkaistaan yhteenlaskettavien lukumäärä n aritmeettisen summan laskukaavan avulla.

$$S_n = n \cdot \frac{12 + 383}{2}$$

Sijoitetaan $S_n = 10\,665$.

$$10\,665 = n \cdot \frac{12 + 383}{2}$$

Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella.

$$n = 54$$

Summassa on 54 yhteenlaskettavaa.

Vastaus

54

13.20

Summa $1 + 2 + 3 + \dots + n$ on aritmeettinen summa, jossa on n yhteenlaskettavaa. Pitää selvittää, millä luvun n arvolla summa on pienempää tai yhtä suurta kuin 357 621.

Muodostetaan summan lauseke.

$$S_n = n \cdot \frac{1+n}{2}$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä}$$
$$a_1 = 1 \text{ ja } a_n = n.$$

Ratkaistaan, millä n :n arvolla summan arvo on 357 621.

$$n \cdot \frac{1+n}{2} = 357\,621$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx -846,2 \text{ tai } n \approx 845,2$$

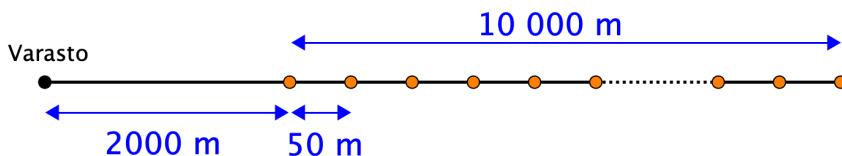
Koska summa $1 + 2 + \dots + n$ kasvaa, kun n kasvaa, on 845 suurin n :n arvo, jolla $1 + 2 + \dots + n \leq 357\,621$.

Vastaus

$$n = 845$$

13.21

Oletetaan, että valaistavan osuuden molempiin päihin tulee pylvä. Valaistavan osuuden pituus on $10\text{ km} = 10\,000\text{ m}$. Pylväiden välinen etäisyys on 50 m .



Pylväitä tarvitaan $\frac{10\,000\text{ m}}{50\text{ m}} + 1 = 201$ kappaletta.

Lyhin kuljetus voidaan tehdä siten, että ensin viedään lähimmät kolme pylvästä. Edestakainen matka on $2 \cdot (2000\text{ m} + 100\text{ m}) = 4200\text{ m}$.

Seuraavien kolmen pylvään kuljetusmatka on $2 \cdot 150\text{ m} = 300\text{ m}$ pidempi. Koska seuraava kuljetusmatka on aina 300 m pidempi kuin edellinen, muodostavat kuljetusmatkat aritmeettisen jonon. Jonon ensimmäinen jäsen on 4200 (m) ja viimeinen jäsen $2 \cdot 12\,000 = 24\,000\text{ (m)}$.

Koska kerralla kuljetetaan 3 pylvästä ja pylväitä on kaikkiaan 201 kappaletta, tarvitaan kuljetusmatkoja $\frac{201}{3} = 67$ kappaletta.

Kokonaismatka on aritmeettinen summa. Lasketaan summan arvo.

$$S_{67} = 67 \cdot \frac{4200 + 24\,000}{2}$$

$$= 944\,700 \text{ (m)}$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä}$$

$$n = 67, a_1 = 4200 \text{ ja } a_{67} = 24\,000.$$

Siirtotyössä joudutaan ajamaan vähintään

$$944\,700 \text{ m} \approx 945\,000 \text{ m} = 945 \text{ km}.$$

Vastaus

945 km

13.22

Kirjoitetaan summa alkuperäisessä muodossa ja käännettyssä järjestyksessä ja lasketaan summa yhteen termeittäin.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 S_8 & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & a_5 & + \\
 + & S_8 & = & a_8 & + & a_7 & + & a_6 & + & a_5 & + & a_4 & + \\
 \hline
 2S_8 & = & (a_1 + a_8) & + & (a_2 + a_7) & + & (a_3 + a_6) & + & (a_4 + a_5) & + & (a_5 + a_4) & +
 \end{array}$$

Kaikki alimman rivin kahdeksan summaa $(a_1 + a_8)$, $(a_2 + a_7)$, ... ovat yhtä suuret, sillä

$$\begin{aligned}
 & a_2 + a_7 \\
 & = a_1 + d + a_8 - d \\
 & = a_1 + a_8
 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
 & a_3 + a_6 \\
 & = a_1 + 2d + a_8 - 2d \\
 & = a_1 + a_8
 \end{aligned}$$

jne.

Siis alin rivi voidaan kirjoittaa muodossa $2S_8 = 8 \cdot (a_1 + a_8)$, jossa summan arvoksi saadaan

$$S_8 = \frac{8 \cdot (a_1 + a_8)}{2} = 8 \cdot \frac{a_1 + a_8}{2}.$$

Vastaus

$$S_8 = 8 \cdot \frac{a_1 + a_8}{2}$$

- b) Oikeanpuoleisesta pystysuorasta osuudesta jää x -akselin alapuolelle yhtä ruutua lyhyempi matka kuin yläpuolella. Murtoviivasta pisteeseen $(12, 12)$ on viimeisestä osuudesta x -akselin yläpuolella 12 ruutua. Siis viimeisen osuuden kokonaispituus on $12 + 11 = 23$ ruutua.

Koko matkan pituus on aritmeettinen summa.

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot 23$$

$$= 2 + 4 + 6 + \dots + 46$$

Aritmeettinen summa.

$$= 23 \cdot \frac{2 + 46}{2}$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä}$$

$$n = 23, a_1 = 2 \text{ ja } a_{23} = 46.$$

$$= 552$$

- c) Viimeisestä osuudesta pisteeseen (n, n) on n ruutua x -akselin yläpuolella ja siten $n - 1$ ruutua x -akselin alapuolella. Viimeisen osuuden pituus on siis $n + n - 1 = 2n - 1$ ruutua.

Koko matkan pituus on aritmeettinen summa.

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot (2n - 1)$$

$$= 2 + 4 + 6 + \dots + (4n - 2)$$

Aritmeettinen summa.

$$= (2n - 1) \cdot \frac{2 + 4n - 2}{2}$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ missä}$$

$$n = 2n - 1, a_1 = 2 \text{ ja } a_{2n-1} = 4n - 2.$$

$$= 4n^2 - 2n$$

Lausekkeen voi sieventää

CAS-laskimella.

Vastaus

- a) 56 b) 552 c) $4n^2 - 2n$